§1.2 复平面上的点集及曲线

一、复平面上点集

在xOy二维平面上，点(x,y)与一个复数$z=x+iy$及向量$\overrightarrow{Oz}$建立一一对应，故二维xOy平面称为复平面，x轴称为实轴，y轴称为虚轴.

1. 下面给出复平面上有关点集的基本概念：

Def 1. $N_\rho(z_0)=\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$ 称为以z_0为中心，ρ为半径的邻域.

其余11个概念可由邻域定义：

内点，开集，边界点及边界，闭集，连通集，开区域，闭区域，有界点集，点集的直径，聚点，孤立点

上述概念的定义完全类似二维空间中点集的概念.

2. 复数域的完备性定理

闭区域套定理，柯西收敛准则，致密性定理，有限覆盖定理，聚点定理

3. 复数点列的收敛性定理

(1) $\{z_n\}\to z_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, n>N$时$|z_n-z_0|<\varepsilon$

(2) $\{z_n\}$收敛$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, n,m>N$时$|z_n-z_m|<\varepsilon$

(3) 设$z_n=x_n+iy_n$, $z_n\to z_0=x_0+iy_0 \Longleftrightarrow x_n\to x_0, y_n\to y_0$

二、复平面上曲线

1. 曲线有关概念

在xOy平面中，曲线参数方程 $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in I$

对应在复平面上，一般形式：$z=x(t)+iy(t), t\in I$

这里$x(t), y(t)$均为实变量实函数.

Def 2. 若曲线L：$z=z(t)=x(t)+iy(t)$ 中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 都连续，则称曲线L是连续曲线

Def 3. 无重点的连续曲线称为简单曲线（Jordan曲线）

曲线的重点：曲线的参数方程中不同参数对应于同一点，这种点称为曲线的重点

Def 4. 在曲线的参数方程 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ 中，当 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都连续且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，则称L是光滑曲线

Prop. 光滑曲线一定可求长

弧长 $S \xlongequal{\text{如}[\alpha,\beta],\ L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}} \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

2. 常见平面曲线

(1) 直线方程：过两点 z_1, z_2 的直线方程 $z=z_1+(z_2-z_1)t$

(2) 圆弧方程：$z=z_0+Re^{i\theta}$，$0\le\theta<2\pi$

其他形式：$|z-z_0|=R$，$z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+C=0$

这里C为实数，满足 $|\beta|^2>C$

表示以 $-\beta$ 为圆心 $\sqrt{|\beta|^2-C}$ 为半径的圆周

~~三、复变函数~~